物性研究 40－2(1983－5)

粗視化の問題[†]

── 巨視的カオスをめぐって ──

(1983年3月18日受理)

京大・理　　富 田 和 久

[要約]

巨視的カオスをめぐって粗視化の問題に反省を加え，2つの点を指摘する。(1) 形式的問題として，巨視系のカオス化は，自己処理の限界による本質的粗視化にその範型を求むべきである。(多体性は重要でない) (2) 物理的問題として，巨視的カオスを把握するには，確率論的な面に限定せず，決定論的な面を併せて考慮する両面的記述が必要である。(従って，'coherent randomness' という概念が生まれる。)

§1　はじめに

巨視的カオスを論ずる際，気になる事柄として「粗視化」の問題がある。これは原子論にもとづく統計力学によって巨視的熱力学を導く際によく用いられる表現であるが，多くの場合，その含みとして ────

† 本稿は，1983年1月7日，特定研究〝乱流現象の解明と制御〟の理論班合同研究集会 (京都) において行った報告にもとづく。

† TOMITA, Kazuhisa

(1) 多自由度系を扱うため，現象の詳細に追従することは困難である。

(2) 粗い観測をするとは平均化を行うことである。

という意味に解されている。

しかし乍ら，巨視的な系においていわゆるカオスが出現する際に，上記(1),(2)の考え方をそのまま適用してよいか，ということは問題である。何故なら，巨視的自由度にカオスが現れる際には，――――

(1)′ 小数自由度系でもカオスが出現する。

(2)′ 粗く見るということを直接平均化とだけ考えたのでは，処理出来ない問題が残る。（例えば乱流状態における秩序運動の存在。）――――

という事態が知られているからである。

この様な問題意識の下に，我々は，巨視的な揺ぎの問題を扱う場合，観測の粗さということが，必ずしも直接平均化を意味しない新しい見方（本質的粗視化）を提唱したい。この際，見方を拡げる手がかりとして，計算機における計算可能性の問題，算術体系の無矛盾に関する証明可能性の問題を参考として取り上げる。

§２においては「本質的な粗視化」を含む系の例として，(1) 乱流の出現（微分方程式系），(2) 生態系（差分方程式系），(3) 計算機系，(4) 算術体系を取り上げ，それらの間の形式的類似点を指摘する。§３以下においては，物理的な問題として，‘random’な面と‘regular’な面とをあわせて考慮する「両面的記述」が必要であることを論ずる。

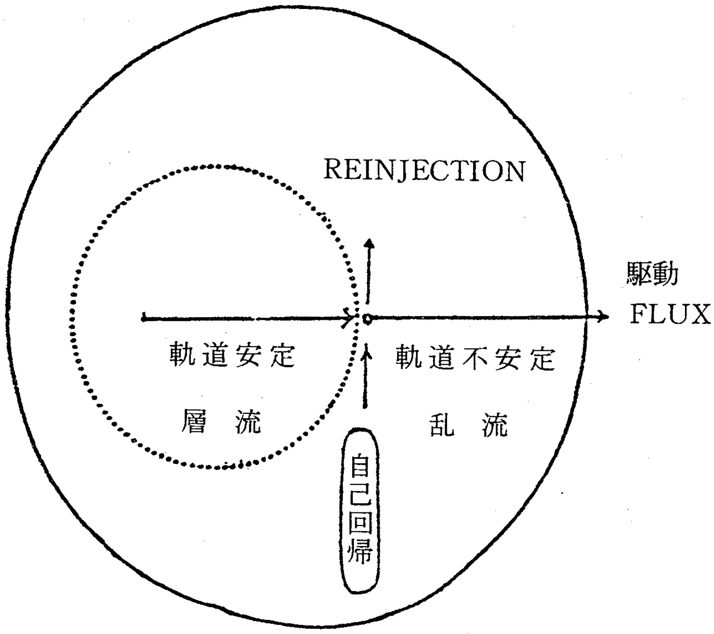
§２　本質的粗視化

この節では，カオスの出現，あるいは類似の現象を含む系の例をいくつか挙げ，その類似点，共通点に注意しつつ，粗視化の問題を考える。

§2.1　乱流の出現（微分方程式系）

流体の乱流を頭において，一般に散逸を含む微分方程式系の解について考える。この場合，乱流出現の条件は種々の形で論じられているが，一つの抽象的な見方として次の様に考えることが出来る。――一般に外部からの駆動 flux (pumping) を増して行き，これが減衰 (damping) の効果を上まわる様になると，位相空間の双曲点をめぐって新たな事態が発生する。すなわち，不安定分枝附近の流れのように双曲点を離れて行った流れが安定分枝附近の流れとなって原点附近に回帰してくるが，原点に落着くわけにいかないので再び回帰運動（渦状運動）を繰り返すようになる。（この様な re-injection を伴なう双曲点は，いわゆる snap-back repeller

と極めて類似している。）この際回帰の仕方は一通りでなく極めて多くの可能性があるので結果は大変複雑な形の軌道となる。すなわち，この点の出現以前に存在した層流の軌道安定性が失なわれて，軌道不安定（sensitive dependence on the initial condition）が起り，乱流が現れると考えられる。（cf. Lorenz 模型[1]）　このような形式的な考え方は，流体乱流に限らず，化学反応等非線型な微分方程式であらわされる系に対して，原理的には常に適用することができる。



第１図　乱流の出現（微分方程式系）[1]

§ 2. 2　生態系（差分方程式）

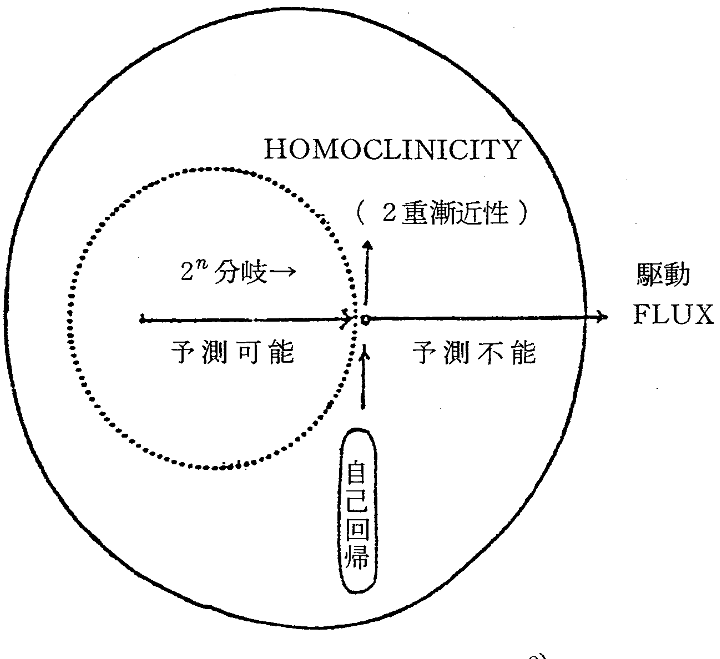
微分方程式の解の振舞を論じ易くするために，Poincaré は，解軌道と位相一定の面との交点だけに着目して，これを離散的な差分写像系として捉えた。また，自然の中には生態系の場合のように，元来差分方程式として扱うべき現象も少なくない。この様な差分方程式の簡単な例として，生態系で扱われる logistic equation

$$x_{n+1} = A x_n (1 - x_n)$$

を挙げることが出来る。この方程式から複雑な解が発生する様子を始めて詳しく査べたのは R. May[2]であるが，その結果は次のように要約される。――この場合にも，駆動力（パラメータAの値で表わされる）が小さい場合には，系の解は簡単で予測可能な形（例えば，固定点あるいは閉軌道）をしているが，駆動力を上げて行くと，典型的な場合，閉軌道の周期が階段的に倍増を繰り返し，有限のパラメーター区間をへて無限長周期の現れる点 A_∞^*（$\equiv 3.57\cdots$）に収束する。これ以上駆動力を上げれば，解軌道は同一点の近くに繰りかえし戻るが決して閉

じない軌道を描くことが示される。この様な事態になると，出発点を与えても実際上その後の行動は予測不能となり，これが流体の場合の乱流に相当する状態と解釈された。ここで予測不能という意味は，物理的にある出発点を与えてある結果をえた場合，再び前回と同じ出発点を採用しても，必ずしも前回と同じ結果がえられないという意味である。これは，初期条件を与える精度が物理的に有限であることによる。このような現象を初期条件に対する敏感性という。

上記の例は１次元系であるが，一般に２次元差分系を問題にすれば，微分方程式の場合との類似が認められる。すなわち，駆動 flux を上げて行けば，臨界値を越えると，ある双曲点の附近の流れに新たな事態が生まれ，この点の不安定分枝と安定分枝が接触するという現象，（いわゆる homoclinic condition）が発生する。こうなれば，この双曲点は一般に２種の径路を辿って近づきうることになる。（これを２重漸近性と呼ぶ）　このような２重漸近性は自己回帰をあらわすものであり，自己回帰が発生すると，解軌道は極めて複雑化し，「奇妙なアトラクター」（ strange attractor ）を描くようになる。この様子は乱流の場合とよく似ている。かゝる事態の発生以前には出発点を与えれば運動は予測可能であったが，この事態が発生すれば，運動の将来は事実上予測不能ということになる点も前節と同様である。実際，Poincaré 断面をつくることによって，乱流現象を離散表示の言葉で論ずることも出来るのである。



第２図　生態系（差分方程式系）[2)]

§ 2.3　計算機系[3,4)]

問題の本質を見定めるため，別の例として計算機系を考える。この場合の関心事は

(1)　入力信号を処理して，正確な出力信号をあたえることが出来るか？（計算可能性の問題）

(2) 乱雑さ (randomness) とは何か？ ———

という問題である。

計算機の場合，駆動 flux に相当する量は，入力信号の桁数 (精度，あるいは強度) であるが，計算機の処理 (process) できる桁数が大きくても有限であることは言うまでもない。

今外部からある桁数の信号が入力したとし，計算機の役割は入力信号を処理した上，出来るだけ経済的に出力としてこれを再現することであると考えよう。この場合，発生する問題として，(1) 正確な再現が可能かどうか。また，これが可能であるとして，(2) どの程度経済的に再現を行なうことが出来るか ——という点が重要となる。

(1) 正確な再現が可能か，否か。

当然のことであるが，入力信号の桁数が計算機の容量 C^* (処理しうる桁数の最大限) を越えていれば，計算機は入力信号を正確に出力として伝送再現することは出来ない。

入力信号の桁数が小さい間は，正確な出力が期待できるが，入力の桁数を上げて行けば，計算機の限界容量に達して以後は処理不能 (improcessible) という事態が起る。この事実は自己と同大の入力を処理すること，すなわち自己処理が正確な処理の限界であると言ってもよいであろう。ただし，このことは入力として限界容量を越える先の方の桁の信号に意味がなかったということと同内容ではないことを記憶しておく必要がある。

(2) どの程度経済的に伝送再現できるか。

入力信号の桁数は計算機の限界容量内であったとしょう。この場合，正確な伝送再現は可能であるが，その方法は必ずしも一通りではない。すなわち，入力信号の中に規則性を見出すことが出来れば，規則そのものを信号化して送り，規則性に従って再構成せよという命令を送る方が，入力信号のすべての桁を逐一送るより経済的であることは明らかである。

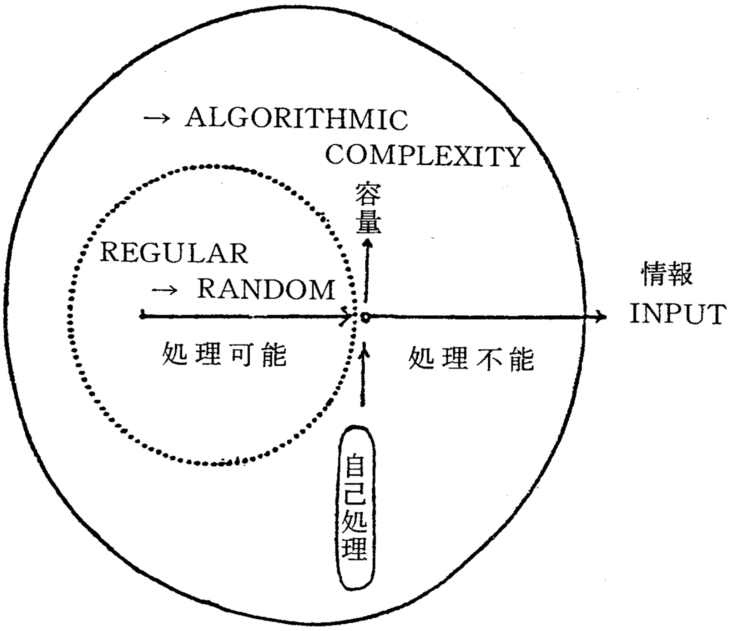
そこで，入力信号を構成しうる最短のプログラムを求め，その桁数 C を入力信号の複雑度 (algorithmic complexity) と呼ぶことにすれば (Kolmogorov,[3] Chaitin,[4] 1965)，入力信号はその複雑度 C に従って分類することが出来る。さらに，入力信号の桁数 C_i に対して，相対複雑度

$$K(C_i) \equiv C/C_i \qquad \text{(Kolmogorov complexity)}$$

を定義することにすれば，$K(C_i)$ の値が小さい程簡単な規則性によって処理し得ることになるが，$K(C_i) \lesssim 1$ のものは規則性を見出すことが難しいので，$K(C_i) \sim 1$ をもって'random'の定義とすることが提唱された。[3] 一般に桁数が増大すれば random な信号の頻度は指数関数的に増大することが知られている。

ここで，改めて入力信号の複雑度Cを小さい値から順次増していくことを考えれば，限界容量C^*（処理可能の桁数の上限）に対して，$C \ll C^*$ならば，入力を処理して簡単かつ低廉に出力化することが出来るが，$C \lesssim C^*$，となれば急激に ‘random’ となり，$C > C^*$，すなわち自己処理の限度を越えれば，処理不能ということになる。この機構は既に述べた乱流発生の場合のそれと極めて類似していると考えられる。

最後に，注意しておきたい事は，‘chaos’ という言葉は処理不能領域に対して用いるのが適切であるのに対して，ここで定義された ‘randomness’ は，あくまで処理可能領域における概念であることである。この点は後に重要となる。（§ 2.5の末尾，および§ 3参照）



第3図　計算機系（差分演算機構）[3,4]

§ 2.4　算術体系[5,6]

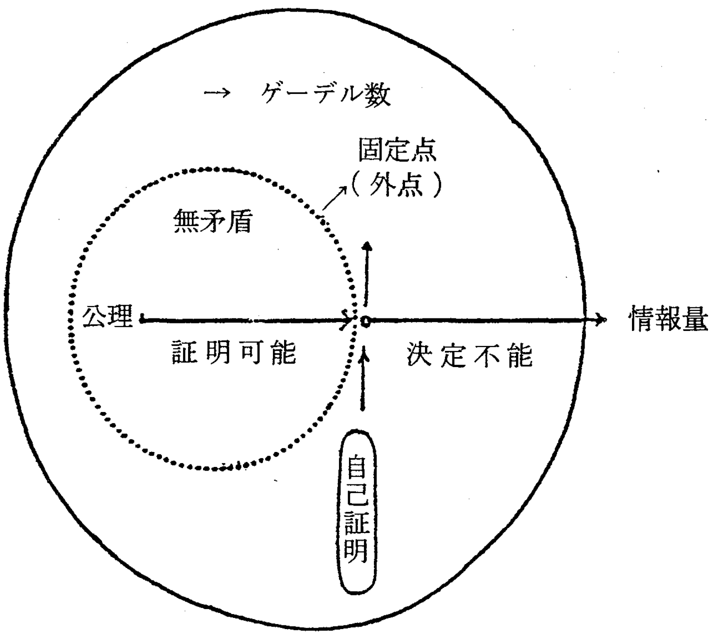
前節に述べた計算可能性の問題を，数学基礎論における Gödel の不完全性定理に結びつけたのは G. Chaitin[4] である。この定理の内容は，—— 算術体系の無矛盾性を，算術体系の内部において有限の手続で証明することは不可能である —— ことを確立したものである。

前節の計算機系の場合と並行させて考えれば，この場合，入力信号に当るものは算術における定理であり，信号の処理に当るものは，公理系から出発して定理を証明する手続きである。すなわち，処理の可能不可能に対応して，証明の可能不可能が現われる。

Gödel は，定理の証明の中に現れる数についての言明を，すべて素数の巾とその積で表わされる数（これを Gödel 数という）に対応させる写像の方法を用いて，一つの証明に一意的に一つの数（Gödel 数）を対応させた。この方法に従えば，前節の algorithmic complexity に対応す

るものが最短証明に対するGödel数に他ならない。

そこで，以上の対応を追うとすれば，当然予想されることは算術体系の証明能力に限界が現われるという事態である。これは，どの様な事態であろうか。算術体系の場合，これは次のような形に表現される。今，「‘Gödel数Gで表わされる言明’を証明する事は不可能である」という言明を考え，この「言明」全体に対応するGödel数をG'であるとしよう。この様な対応はGの代りにG'を代入して新たなG''を得るということで1つの漸化式を形成すると考えられるが，この漸化式にとっての特殊な事態は明らかにGとG'が同一となる固定点である。この固定点G_c（自己証明）は証明可能の領域から近づくことも出来るが，G_c自身は証明可能の領域には所属しない。—— この事実をGödelが証明したのである。すなわち，G_cで表わされる言明は，算術体系にとっては判定不能の命題なのである。この事態が，前節の計算機系において，$C=C^*$（自己処理）が処理不能領域に属したことと対応していることは明らかであろう。



第4図　算術体系[5)]

§ 2.5　諸例の共通点

以上において我々は，4つの例について，それが自己回帰（§ 2.1及び§ 2.2），自己処理（§ 2.3），自己証明（§ 2.4）に関わる事態に達すると，それぞれ，予測不能，処理不能，判定不能という相似た振舞を示すことを述べてきた。これらの事態を出来るだけ共通の言葉で表現するとすれば，次のようになろうか。

★

これらの系はいずれも，固有の入力情報（情報量 I ）を処理して，これを出力情報として再現することを要求されていると考えられる。しかし乍ら，この情報処理系には，常に，物理的有限性に由来して，処理可能な情報量の限界 I_c （情報容量）が存在するから，少くとも次の二つの事態を分けて考える必要がある。

(i)　$I < I_c$ の場合

この場合には入力情報を処理して，これを出力として再現することが可能である。——これは，入力情報に加えて巨視的雑音が混入しても，これを認知してその効果を排除することが出来ることをも意味している。——従って，出力情報を捉えれば，これからさかのぼって入力情報の性質を適確に推定することが出来るのがこの場合の特徴である。

(ii)　$I \gtrsim I_c$ の場合

この場合には，入力情報を出力側に適確に再現することは不可能である。——これは入力情報に加えて巨視的雑音が混入した場合その効果が拡大されて，出力情報が入力側になかったパターンをも含みうることを意味している。——従って，この場合には，出力情報を捉えても，これからさかのぼって入力情報の性質を推定することは，少くとも正確には行いがたいということになる。

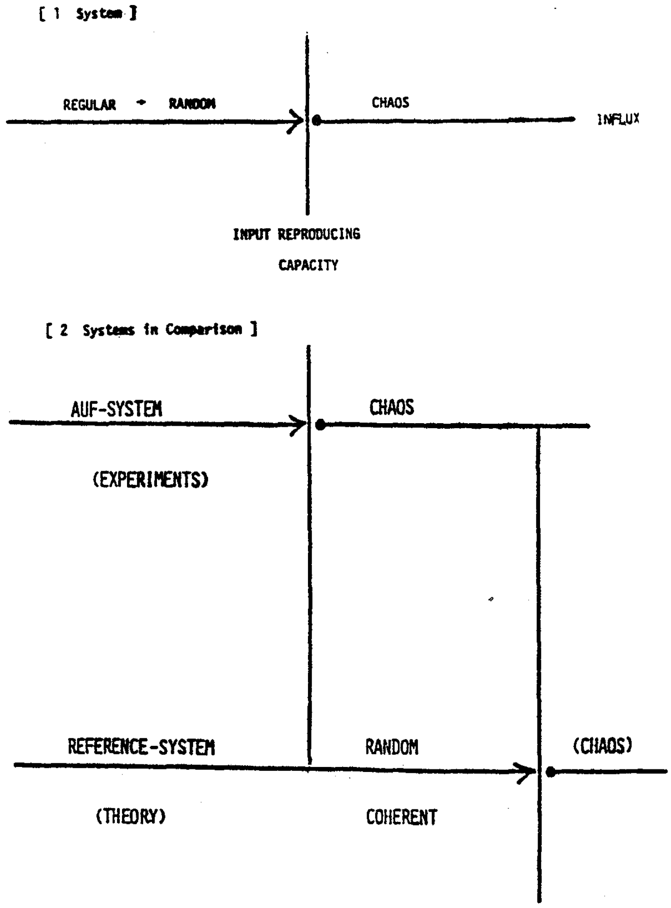
ここで，$I = I_c$ を境として起る(i)の事態から(ii)の事態への移行は，本質的粗視化（intrinsic coarsening）とも呼ぶべき事柄である。このような本質的粗視化は，初めに述べた従来の粗視化の概念と無関係ではないが，必ずしも‘多自由度’とか‘平均化’とかいう概念に束縛されないものであって，いわば「粗視化」のより広い把握を与えていると言ってよいであろう。

★

ここで，二，三の注意を述べておこう。

先ず，我々はここで物理的な具体例から話を始めたが，後の段階で述べた例程一般的抽象的な姿をして居ること，第2には，時期的にみれば，最後に述べた例[5]（§2.4）が，実は最も早い時期に提出された考察だということである。このことは，物理的具体例を解する上において，一般的考察が役立つことを示唆しているが，従来，ここに述べたような異なる現象の間に存在する共通性の認識を提唱した例は少ないように思われる。

最後に，個々の例を解する上で，形式的同型を認める積極的必要性は必ずしも明白でないとしても，我々が通常は2つの異なる例を並置対比して論ずることに注意すれば，同型性は重要な実際的意味をもつことになる。次節においてこの問題を論じよう。



第５図　２つの形式系の対比的考察
着目系のカオスが基準系の coherent
randomness に対応していることを示す。

その際に有用であると思われるので，ここで，§ 2. 3 の末尾でふれたことを一歩進めて１つの提案の形で述べておく。それは，本質的粗視化の起っている場合を "chaos" と呼び, "randomness" という言葉はたとえ複雑でも本質的粗視化が起っていない場合（前出）に限定するのがよいということである。

§ 3　２面的記述の必要性

前節では，個々の系をそれ自体として考察し，いくつかの系の構造に '本質的粗視化' という形式的類似性が存在することを指摘した。しかし乍ら，自然現象の理解を志す物理学においては，前節の意味では異なる２つの体系を並置対比して両者の関係を考察することが研究の常套的手段である。――すなわち, '実験' と '理論' を対比し，両者の与える結果の整合性を確認することが，現象 '理解' の内容を形成するのである。

ところで，この様な視点から見ると前節にあげた例のうち，最初の２つについては著しい事実が見出される。それは，ここに現れている本質的粗視化は実は '実験' の立場から見た場合

のことであって，‘理論’の立場から記した方程式系の振舞についての記述は明らかに決定論の内部の問題であり，だからこそ，方程式系の分析は，実験事実の理解のために役立っているということである。

例として，乱流出現の問題を考えよう。この場合，実験結果が駆動 flux に依存して変化し，層流から乱流に移行することを我々は‘本質的粗視化’の1例と見立てた。

そこで，次にこの現象を支配すると思われる微分方程式系（あるいは，これを計算するための差分演算機構）を考えれば，それ自体の本質的粗視化は，実験の場合よりも駆動 flux の遙かに大きい段階で起ると考えられる。従って，実験的処理不能（乱流）領域は，理論的に見れば処理可能領域に属していることになる。すなわち，乱流状態も微分方程式から見れば，決定論的追究の対象となしうるのである。ここに理論計算の価値があることは明らかであろう。

しかし乍ら，これは乱流状態が簡単な理論解で表わされるという意味ではない。すなわち，この状態は微分方程式による処理可能領域に属するとはいうものの，簡単な規則性をもつ運動ではなく，乱流化によって飛躍的に複雑化し，前節の意味において‘random’な様相を呈するのである。この意味において乱流は random な顔をもっており，理論的扱いも決して容易ではない。

そこで，この様な困難な事態に直面して，いっそのこと平均化して考えようというのが統計理論の立場である。この様な立場は熱平衡における現象論（熱力学）を導く場合には満足すべき結果を与えることが知られているが，熱平衡を遠く離れた場合，特に巨視的カオスを扱う場合には問題が残る。例えば乱流の場合，乱流相に入ってからも著しい秩序運動 (ordered motion) が伴なうこと，また，巨視的揺動は平均運動と同程度の大きさをもちうるという事実は，明らかに事態が必ずしも単純でないことを示している。

そこで結論を述べれば，巨視的カオスに関する限り，本質的粗視化を記述する際には，従来の統計力学のようにすべてを確率化して考える立場は狭すぎる。すなわち，巨視的カオスを扱う際には stochastic な様相 (randomness) と deterministic な様相 (coherence) の一方を捨てるのでなく，両者を共に頭におき，いわば両面的な記述 (bi-lateral description) を行なう必要があると考えられる。この様な見方を実際的問題に適用すれば，‘random’な現象は同時に‘coherent’でありうるという重要な結果が導かれる。そしてこの考え方はこの種の問題について以前から知られているパズルの解釈に光を投ずることになる。

‘randomness が coherence をもつ’という言い方は，現在必ずしも常識的な通念とは言い難いが，次節では，その簡単な1例を示すことにしよう。

§ 4　Coherent randomness [7)]

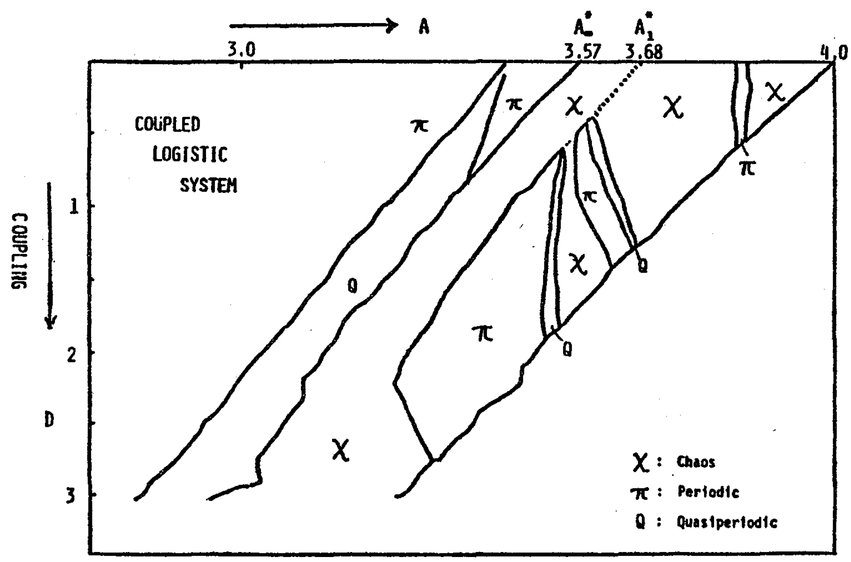
ここでは，§ 2.2に上げた logistic system を2つ結合した，次のような2次元写像系を考える。

$$x_{n+1} = Ax_n(1 - x_n) + D(y_n - x_n),$$

$$y_{n+1} = Ay_n(1 - y_n) + D(x_n - y_n)$$

ここに，$A > 0$，$D > 0$，$0 < x_i$，$y_i < 1$とする。

$D = 0$の場合の1次元写像系においてはA_∞^*（$\equiv 3.57$）$< A < 4.0$の領域において既述のごとくカオスが現れることが知られている。そこで，$D \neq 0$の場合にこの領域はどの様な影響を受けるであろうか。例えば，Liapunov 数を計算することによって，これを定量的に査べることが出来る。第6図にはえられた結果を$A - D$空間における概観的相図の形に示してある。



第6図　Coupled Logistic System の相図[7)]
単独系のカオス領域（$A_\infty^* < A < 4.0$）のカオス性が結合によって quench されて，周期運動が現れることを示している。ただし，Dを増すに従って領域全体の位置が略々Dに比例してずれていることに注意。

この図の右端の space は解軌道が発散して物理的意味をもたぬ領域であるが，この領域に面する境界がDに略々比例して変化し，またカオス領域の左端の境界も同様の変化をしていることは注目に値する。すなわち，カオス領域は全体としては，その位置がAの値の小さい方にずれるだけであり，結合Dの効果はカオス領域内部の変化としてその特徴をあらわすと見ること

ができる。そこでカオス領域の内部をみれば，$3.68 < A < 4.0$ の間に相当する状態が結合 D によって顕著な影響をうけ，カオスが消失して，周期軌道の現れることが確認される。D をさらに増せば周期軌道も発散領域に吸込まれるが，$3.57 < A < 3.68$（Ruelle点）に相当する状態は生きのこる。ただし，D の増加に伴ってそのリアプノフ数は単調に減少する。すなわち，一般的にカオス消失の傾向が認められるのである。

微分方程式で表わされる系の場合にも，例えば，２つのLorenz模型を結合させることによって，カオスが quench されて周期運動に変ることが認められるいる[8]。

この様な事実は，カオス領域を単純な確率的記述にすりかえた場合には期待しえないことがらであって，'random' な運動でもそれが決定論の支配を受けている（'coherent' である）限りは結合によってその 'randomness' を除きうることを示すものに他ならない。見掛け上，'random' な現象に遭遇しても，これを簡単に統計化せず，両面的記述を心がけねばならぬ理由はここにある。

§５　結　び

前節では簡単な模型によって 'randomness' と 'coherence' の共存を示したが，これに加えてここでは現象自体のもつ２面性の徴候とみられるいくつかの点を試論的に指摘しておこう。

(A)　現象の１次元的な断面を捉える場合，しばしば，random な様相と regular な様相との複雑な交代的出現が観測されること。例えば，位相空間において認められる間欠性(intermittency)，また制御パラメーターの空間において認められる '窓' 構造（window structure）をあげることが出来よう。この場合，一方の面だけを拾い上げようとすれば半端な（ fractal ）次元が現れる。この様に１次元的断面で見ようとすると，'カオスはその出現の仕方自体もカオスである'[9] という面倒なことになるが，

(B)　現象を２次元的断面によって見る，という方針をとれば，前述のような複雑さは著しく減少して，より自然に事柄を見ることが出来る。例えば，２次元的に見る strange attractor は事の両者を素直に現わしており，randomness が消し合う現象も２次元的には無理なく記述できるのである。

これらの事実は，現象の本質的２面性の故に，２次元的記述の方が分り易く，１次元的記述には無理があることを示していると考えられるのではなかろうか。

★

以上本稿においては，巨視的カオスをめぐって粗視化の問題に反省を加えたが，えられた結

論は次の２点に要約されよう。

(1) 形式的の問題として，巨視系のカオス化ということは，多自由度ということに重点があるのではなく，自己評価という限界の存在による本質的な粗視化にその範型を求むべきであること。

(2) 物理的の問題としては，巨視的カオスの記述を全面的に確率化することは必ずしも適当でない。むしろ，確率論的な面と決定論的な面をあわせて考慮する両面的記述が必要であること。従って，'coherent randomness' という概念が成立する。

上記の２点は，いずれも'粗視化'をめぐる従来の考え方の拡張が必要であることを示唆するものであり，巨視的カオスを理解する上で役立つだけでなく，より広い範囲に適用しうるものと思われる。

参考文献

1) E. N. Lorenz, J. Atmos. Sci. **20** (1963) 130.
2) R. May, J. Theor. Biol. **51** (1975) 511; Nature **261** (1976) 459.
3) A. N. Kolmogorov, Tri. podhoda k. opredeleniju "Količestvo informacii." Problimy peredači informacii **1** (1965) 3.
4) G. Chaitin, J. Assoc. for Computing Machinary **21** (1974) 403; Sci. American (1975) May, p. 47.
5) K. Gödel, Monatschefte für Mathematik und Physik. **38** (1931) 173.
6) E. Nagel and J. R. Newman: *Gödel's Proof* (Newyork University press, 1959).
7) Y. S. Lee and K. Tomita, to be published.
8) H. Fujisaka and T. Yamada, Progr. Theor. Phys. **69** (1983) 82.
9) D. Rand, S. Ostlund, J. Sethna & E. D. Siggia, 'Universal Transition from Quasiperiodicity to Chaos to Dissipative Systems', (1983) Preprint.